OM IDENTITETEN AF DEN FREDHOLMSKE DETERMINANT OG EN UENDELIG v. KOCH'SK DETERMINANT[1]).

AF

JOHANNES MOLLERUP.

I en nylig fremkommen Afhandling *(Bulletin des sciences, Mélanges 8, (1911))* har jeg anvendt følgende Metode til Bestemmelse af en usymmetrisk Kernes fuldstændige Orthogonalsystem; i et specielt Tilfælde af den Fredholmske Ligning skyldes Metoden *Erhard Schmidt* (Math. Anm. 64, 164).

Lad den homogene Ligning være

$$(1) \qquad \varphi(s) = \lambda \int_a^b K(st)\, \varphi(t)\, dt,$$

hvor $K(st)$ er integrabel i Omraadet $a \leqq {s \atop t} \leqq b$, og lad $\beta_1(s)\, \beta_2(s) \cdots$ være et fuldstændigt Orthogonalsystem Efter den saakaldte Parseval'ske Formel har man, naar $\varphi(s)$ tilfredsstiller (1)

$$(2) \qquad \varphi(s) = \lambda \sum_i \int_a^b K(st)\, \beta_i(t)\, dt \cdot \int_a^b \varphi(t)\, \beta_i(t)\, dt = \lambda \sum_i \alpha_i(s)\, \rho_i,$$

i det vi sætter

$$(3) \qquad \alpha_i(s) = \int_a^b K(st)\, \beta_i(t)\, dt \quad \text{og}$$

$$(4) \qquad \rho_i = \int_a^b \varphi(t)\, \beta_i(t)\, dt.$$

---

[1]) Denne Afhandling fremkommer samtidig i »Bulletin des sciences«.

Rækken (2) konvergerer absolut og ligeligt. Ved at indsætte $\varphi(s)$ faar man

$$(5)\quad \rho_i = \int_a^b \beta_i(t) \sum_j \lambda\, \alpha_j(t)\, \rho_j = \lambda \sum_j \rho_j \int_a^b \beta_i(t)\, \alpha_j(t)\, dt = \lambda \sum_j \rho_j\, a_{ji},$$

hvor

$$(6)\quad a_{ji} = \int_a^b \alpha_j(s)\, \beta_i(s)\, ds = \int_a^b \int_a^b K(st)\, \beta_j(t)\, \beta_i(s)\, ds\, dt.$$

Determinanten for de homogene Ligninger

$$(5)\quad \rho_i = \lambda \sum_j \rho_j\, a_{ji} \quad \text{er}$$

$$(7)\quad \Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda a_{11} & -\lambda a_{21} & -\lambda a_{31} \cdots \\ -\lambda a_{12} & 1 - \lambda a_{22} & -\lambda a_{32} \cdots \\ \vdots & & \vdots \\ \cdot & & \cdot \end{vmatrix}$$

Efter en Sætning af *Helge v. Koch* (Rend. di Palermo XXVIII) vil denne Determinant konvergere absolut, naar Rækkerne

$$\sum_{j,i} a_{ji}^2 \quad \text{og} \quad \sum_i |a_{ii}|$$

konvergerer. Nu har man, ligesom hos *Hilbert* (Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Integralgleichungen, fünfte Mittheilung, Göttinger Nachrichten 1906, 446)

$$(8)\quad \sum_{ji} a_{ji}^2 = \int_a^b \int_a^b K(st)^2\, ds\, dt.$$

Hvad Konvergensen af Rækken $\sum_{ii} |a_{ii}|$ angaar, da gaar vi over til den itererede Kerne; denne bestemmes ved at indsætte $\varphi(s)$ under Integraltegnet:

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} \varphi(s) &= \lambda \int_a^b K(st)\, \varphi(t)\, dt = \lambda^2 \int_a^b \int_a^b K(st)\, K(tu)\, \varphi(u)\, du\, dt \\ &= \lambda^2 \int_a^b K_2(su)\, \varphi(u)\, du, \qquad \text{hvor} \end{aligned} \right.$$

$$(10)\quad K_2\, su) = \int_a^b K(st)\, K(tu)\, du.$$

Erstatter vi nu $K(st)$ med $K_2(st)$, bliver

$$(11)\begin{cases} a_{ii} = \int_a^b\int_a^b K_2(su)\,\beta_i(u)\,\beta_i(s)\,ds\,du = \int_b^b\int_a^b\int_a^b K(st)K(tu)\,\beta_i(u)\,\beta_i(s)\,ds\,dt\,du \\ = \int_a^b\left\{\int_a^b K(st)\,\beta_i(s)\,ds\cdot\int_a^b K(tu)\,\beta_i(u)\,du\right\}dt. \end{cases}$$

Heraf faar vi

$$(12)\qquad \sum_i a_{ii} = \int_a^b\int_a^b K(st)\,K(ts)\,ds\,dt,$$

hvor Rækken konvergerer absolut. Det er altsaa bevist, at *den til den itererede Kerne $K_2(st)$ hørende Determinant $\Delta(\lambda)$ konvergerer absolut.* De Værdier af λ, for hvilke Ligningerne (5) kan løses, bestemmes af

$$(13)\qquad \Delta(\lambda) = 0,$$

naar $\Delta(\lambda)$ antages at konvergere absolut. Naar λ er fundet, finder vi Konstanterne ρ ved Ligningerne (5); har $\Delta(\lambda)$ Defekten p, da har Ligningerne (5) p lineært uafhængige Løsninger; en saadan Løsning ρ_i har altid konvergent Kvadratsum $\sum_i \rho_i^2$. Af Ligningen

$$(2)\qquad \varphi(s) = \lambda\sum_i \alpha_i(s)\cdot\rho_i$$

finder vi endelig de søgte Funktioner $\varphi(s)$; Rækken konvergerer absolut og ligeligt, fordi

$$\sum_i \alpha_i(s)\cdot\rho_i = \sum_i \int_a^b K(st)\,\beta_i(t)\,dt\cdot\rho_i,$$

hvor Kvadratsummerne

$$\sum_i\left(\int_a^b K(st)\,\beta_i(t)\,dt\right)^2 = \int_a^b K(st)^2\,dt \quad \text{og} \quad \sum_i \rho_i^2$$

konvergerer.

De fundne Løsninger $\varphi(s)$ er altsaa kontinuerte.

Er Kernen *symmetrisk*, $K(st) = K(ts)$, bliver $\Delta(\lambda)$ symmetrisk, da

$$a_{ji} = \int_a^b \int_a^b K(st)\, \beta_j(t)\, \beta_i(s)\, ds\, dt = a_{ij}.$$

Hvis i dette Tilfælde λ er et Nulpunkt for den hele Funktion $\Delta(\lambda)$ med Multipliciteten p, da har $\Delta(\lambda)$ netop Defekten p, og Ligningerne (5) har p lineært uafhængige Løsninger.

I det foregaaende har vi egentlig i Stedet for (1) løst Ligningen

$$(9) \quad \varphi(s) = \lambda^2 \int_a^b K_2(st)\, \varphi(t)\, dt;$$

men sætter vi ligesom *Erhard Schmidt* (Entwicklung willkürlicher Funktionen, Math. Ann. 63, 448)

$$2\, X_1(s) = \varphi(s) + \lambda \int_a^b K(st)\, \varphi(t)\, dt$$

$$2\, X_2(s) = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(st)\, \varphi(t)\, dt,$$

altsaa

$$\varphi(s) = X_1(s) + X_2(s), \quad \text{da er } X_1(s) \text{ og } X_2(s),$$

der ikke begge forsvinder identisk, Løsninger af (2).

Den hele Funktion $\Delta(\lambda)$ har naturligvis de samme Nulpunkter som den Fredholmske Determinant $D_{\lambda K}$,

$$D_{\lambda K} = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{\lambda^p}{p!} \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b \begin{vmatrix} K(s_1 s_1) & K(s_1 s_2) \cdots & K(s_1 s_p) \\ K(s_2 s_1) & K(s_2 s_2) \cdots & K(s_2 s_p) \\ \vdots & & \\ K(s_p s_1) & K(s_p s_2) \cdots & K(s_p s_p) \end{vmatrix} ds_1 ds_2 \cdots ds_p$$

Men *de hele Funktioner* $\Delta(\lambda)$ og $D_{\lambda K}$ *er i Virkeligheden identiske*, og saaledes er efter vort Skøn Fredholms geniale Idé rykket os nærmere. Til Bevis benytter vi en Integralformel. Vi har

$$\int_a^b K(s_1 s_2)\, K(s_2 s_3)\, ds_2 = \sum_i \int_a^b K(s_1 s_2) \beta_i(s_2) ds_2 \cdot \int_a^b K s_2\, s_3)\, \beta_i(s_2)\, ds_2,$$

hvor Rækken konvergerer absolut og ligeligt. Heraf faar vi igen.:

$$\int_a^b \int_a^b K(s_1 s_2)\, K(s_2 s_3)\, K(s_3 s_4)\, ds_2\, ds_3$$
$$= \sum_i \int_a^b K(s_1 s_2)\, \beta_i(s_2)\, ds_2 \cdot \int_a^b \left\{ \int_a^b K(s_2 s_3)\, \beta_i(s_2)\, ds_2 \cdot K(s_3 s_4) \right\} ds_3,$$

hvor

$$\int_a^b \left\{ \int_a^b K(s_2 s_3)\, \beta_i(s_2)\, ds_2 \cdot K(s_3 s_4) \right\} ds_3$$
$$= \sum_j \int_a^b \int_a^b K(s_2 s_3)\, \beta_i(s_2)\, \beta_j(s_3)\, ds_2\, ds_3 \cdot \int_a^b K(s_3 s_4)\, \beta_j(s_3)\, ds_3$$
$$= \sum_j a_{ji} \cdot \int_a^b K(s_3 s_4)\, \beta_j(s_3)\, ds_3$$

og altsaa

$$\int_a^b \int_a^b K(s_1 s_2)\, K(s_2 s_3)\, K(s_3\, s_4)\, ds_2\, ds_3$$
$$= \sum_{ij} \int_a^b K(s_1 s_2)\, \beta_i(s_2)\, ds_2 \cdot a_{ij} \cdot \int_a^b K(s_3 s_4)\, \beta_j(s_3)\, ds_3.$$

Paa samme Maade faar man

$$\int_a^b \int_a^b \int_a^b K\, s_1 s_2)\, K(s_2 s_3)\, K(s_3 s_4)\, K(s_4 s_5)\, ds_2\, ds_3\, ds_4$$
$$= \sum_{i,\,j,\,k} \int_a^b K(s_1 s_2)\, \beta_i(s_2)\, ds_2 \cdot a_{ij} \cdot a_{jk} \cdot \int_a^b K(s_4 s_5)\, \beta_k(s_4)\, ds_4.$$

Naar man fortsætter paa denne Maade, finder man den søgte Formel

$$(14) \left\{ \begin{aligned} &\int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b \mathrm{K}\,(s_1 s_2)\, K(s_2 s_3) \cdots K(s_n s_1)\, ds_1 ds_2 \cdots ds_n \\ &\qquad = \sum_{i_1 i_2 \ldots i_n} a_{i_1 i_2}\, a_{i_2 i_3} \cdots a_{i_n i_1}, \end{aligned} \right.$$

hvor $i_1\, i_2 \cdots i_n$ uafhængig af hinanden gennemløber alle Tallene i den naturlige Talrække.

For $\Delta(\lambda)$ har man Udviklingen

$$\Delta(\lambda) = 1 - \lambda \sum_{i} a_{ii} + \lambda^2 \sum_{i,j} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix} - \lambda^3 \sum_{i,j,k} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$(i < j < k \cdots)$$

eller

$$\Delta(\lambda) = 1 - \lambda \sum_{r_1} a_{r_1 r_1} +$$

$$+ \frac{\lambda^2}{2!} \sum_{r_1, r_2} \begin{vmatrix} a_{r_1 r_1} & a_{r_1 r_2} \\ a_{r_2 r_1} & a_{r_2 r_2} \end{vmatrix} - \cdots (-1) \frac{\lambda^p}{p!} \sum_{r_1 r_2 \cdots r_p} \begin{vmatrix} a_{r_1 r_1} & a_{r_1 r_2} \cdots & a_{r_1 r_p} \\ \vdots & & \\ a_{r_p r_1} & a_{r_p r_2} \cdots & a_{r_p r_p} \end{vmatrix}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

hvor $r_1, r_2 \cdots$ uafhængig af hinanden gennemløber den naturlige Talrække, og ikke behøver at være forskellige. Man skal altsaa bevise Formlen

$$(15) \begin{cases} \displaystyle\int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b \begin{vmatrix} K(s_1 s_1) & K(s_1 s_2) \cdots & K(s_1 s_p) \\ \vdots & & \\ K(s_p s_1) & K(s_p s_2) \cdots & K(s_p s_p) \end{vmatrix} ds_1 ds_2 \cdots ds_p \\ \displaystyle = \sum_{r_1 r_2 \cdots r_p} \begin{vmatrix} a_{r_1 r_1} & a_{r_1 r_2} \cdots & a_{r_1 r_p} \\ \vdots & & \\ a_{r_p r_1} & a_{r_p r_2} \cdots & a_{r_p r_p} \end{vmatrix} \end{cases}$$

Vi betragter et vilkaarligt Led paa venstre Side af (15):

$$\pm \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b K(s_1 s_{i_1}) K(s_2 s_{i_2}) \cdots K(s_p s_{i_p}) \, ds_1 \, ds_2 \cdots ds_p ;$$

dette Led vil være lig med Summen af de tilsvarende Led paa højre Side d. v. s. lig med

$$\pm \sum_{r_1 r_2 \cdots r_p} a_{r_1 r_{i_1}} a_{r_2 r_{i_2}} \cdots a_{r_p r_{i_p}},$$

hvor $r_1 r_2 \cdots r_p$ uafhængig af hinanden gennemløber den naturlige Talrække.

For at se dette dekomponerer man de tilsvarende Produkter

$$K(s_1 s_{i_1})\, K(s_2 s_{i_2}) \cdot \cdots K(s_p s_{i_p}) \quad \text{og} \quad a_{r_1 r_{i_1}}\, a_{r_2 r_{i_2}} \cdot \cdots a_{r_p r_{i_p}}$$

i tilsvarende cirkulære Produkter:

$$\{A_1\}\,\{A_2\} \cdot \cdots \{A_m\} \quad \text{og} \quad \{\alpha_1\}\,\{\alpha_2\} \cdot \cdots \{\alpha_m\}.$$

Man har da efter (14):

$$\int_a^b \int_b^b \cdots \int_a^b \{A_1\}\,\{A_2\} \cdot \cdots \{A_m\}\, ds_1\, ds_2 \cdot \cdots ds_p$$

$$= \sum \{\alpha_1\} \sum \{\alpha_2\} \cdot \cdots \sum \{\alpha_m\} = \sum_{r_1 r_2 \cdots r_p} \{\alpha_1\}\,\{\alpha_2\} \cdot \cdots \{\alpha_m\},$$

hvilket skulde bevises.

Man lægger Mærke til, at Formlerne (2) og (14) ogsaa gælder, naar $K(st)$ er symmetrisk: $K(st) = K(ts)$ og $\beta_1(s), \beta_2(s) \cdot \cdots$ danner Kernens fuldstændige Orthogonalsystem (efter den *Hilbert—Schmidtske* Udviklingssætning). Men da har man

$$a_{ji} = \int_a^b \int_a^b K(st)\, \beta_j(t)\, \beta_i(s)\, ds\, dt = \begin{cases} 0 & j \neq i \\ \dfrac{1}{\lambda_i} & j = i. \end{cases}$$

Hvis nu Rækken $\sum_i \frac{1}{|\lambda_i|}$ konvergerer, faar vi

(16) $$\Delta(\lambda) = \prod \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}\right) = D_{\lambda K}.$$

Da Rækkerne $\sum_i \frac{1}{|\lambda_i|^n}$ konvergerer for $n \geqq 2$, faar man

(17) $$\Delta(\lambda) = \prod \left(1 - \frac{\lambda^n}{\lambda_i^n}\right) = D_{\lambda K_n},$$

hvor K_n er en vilkaarlig itereret Kerne. Jeg tror, at disse Resultater er nye for $n = 1$ og $n = 2$ (sml. *Hans Hahn*, Bericht über die Theorie der lin. Integralgleichungen, Erster Teil, pag. 30).